APLICACIÓN DE LA SIMULACIÓN A UN SISTEMA DE COLAS DE CANAL SIMPLE

Rafael Terrazas Pastor:
Doctor en administración de empresas
Master en ciencias aplicadas
Ingeniero industrial
Diplomado en educación superior
Programador en lenguajes de computación
Experiencia docente hace 25 años en pregrado y posgrado
Tutor y asesor en más de 200 tesis y proyectos de grado
Experiencia en cargos jerárquicos en varias organizaciones
Autor de varios libros en las áreas de optimización, Investigación y Proyectos
Asesor y consultor organizacional
Especialista en gestión de proyectos, modelos de investigación operativa y optimización, simulación de sistemas, metodología de investigación, análisis e investigación de mercados, enseñanza de la educación superior

RESUMEN

El propósito de este trabajo es la aplicación de la simulación Montecarlo a la obtención de resultados esperados en un sistema de colas con un solo canal. El análisis se orienta a tipificar problemas cuyas distribuciones de probabilidad del número de arribos y de servicios son diferentes a la distribución de Poisson; concretamente se trabaja con distribuciones empíricas. Se trata de calcular los parámetros esperados de decisión a partir de un procedimiento manual de simulación, en el entendido de que las fórmulas analíticas no se aplican a estos casos.

Palabras clave: Investigación operativa, sistema de colas, simulación Montecarlo, variables, relaciones funcionales, características de operación, tasa media de arribos, tasa media de llegadas, tasa de ocupación del sistema, longitud esperada en el sistema y la cola, tiempo esperado de espera en el sistema y en la cola, costos esperados.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación operativa es una herramienta poderosa cuando se trata de optimizar sistemas; sobre todo es posible de lograr eficiencia y eficacia en su aplicación a sistemas administrativos, de negocios y a diversos campos del quehacer humano. Una de las técnicas que hoy en día se asocia a lo que es la calidad de servicio al cliente, es la teoría de colas; este trabajo pretende enfocar esta temática a través de una herramienta de la investigación operativa que es la simulación. La simulación Montecarlo es un procedimiento numérico y

experimental que sirve para encarar problemas cuya solución no es posible a través de métodos analíticos; la ventaja fundamental de esta técnica es que gracias a su naturaleza y forma de solución, es posible generar información, simular y de ese modo ahorrar tiempo y costos cuando se la aplica.

La simulación es aplicable a diferentes ramas técnicas del saber humano y por ende a sistemas administrativos y de negocios; el contexto de su tratamiento permite lograr importantes ahorros y ser una herramienta poderosa de apoyo a la toma de decisiones. Este artículo trata de exponer en forma simple la simulación aplicada a un sistema de colas caracterizado por un solo servidor. La simulación de este proceso se la realiza de manera manual, aclarando que todo este procedimiento puede ser replicado en un programa de computadora que permitiría con seguridad establecer sensibilidades y cambios importantes al comportamiento teórico del modelo.

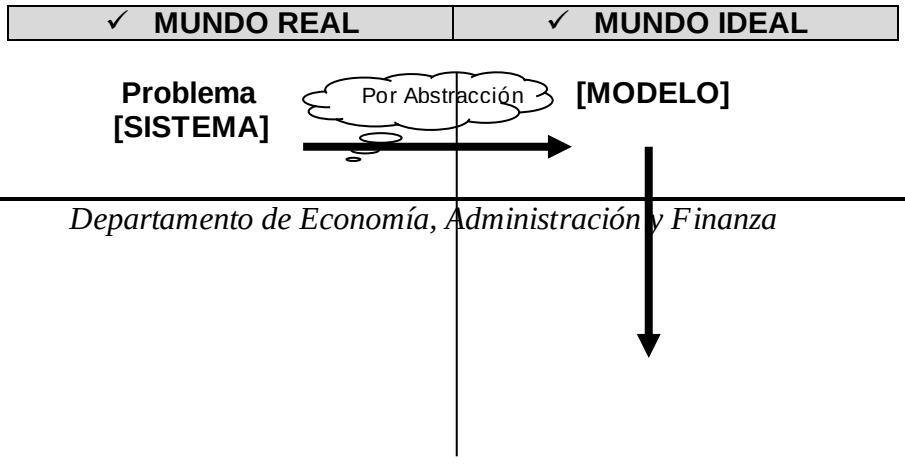
2. MARCO TEÓRICO

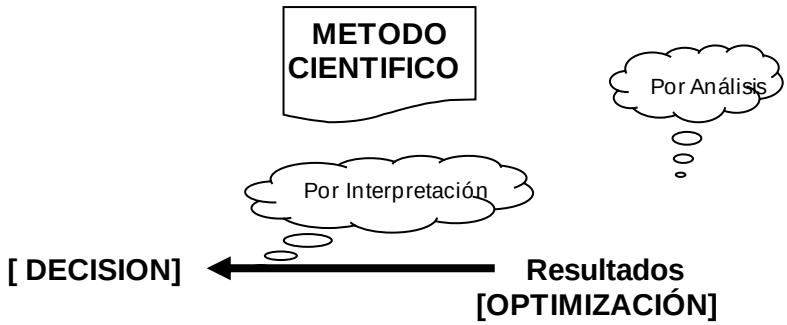
2.1. Noción, concepto y alcance de la Investigación Operativa (IO)

Para encontrar una definición y un concepto de la IO, es necesario acudir a cinco elementos que se constituyen en la esencia primordial de esta herramienta: sistemas, modelos, optimización, decisión y método científico. Estos elementos deben relacionarse de una manera estructural e integral, retroalimentándose continuamente.

Estos cinco elementos, de acuerdo al gráfico 1, se plantean en términos de un contexto en los mundos real-ideal, donde a partir de un problema enfocado como SISTEMA, se hace una abstracción del mismo en forma de MODELO matemático para luego de un proceso de análisis, encontrar soluciones que lleven a la OPTIMIZACIÓN del problema en el mundo real. Estas soluciones interpretadas deben constituirse en parámetros y orientaciones que ayuden a la toma de DECISIÓN y por ende a la solución sistemática del problema. Todo este proceso está apoyado y sustentado por el MÉTODO CIENTÍFICO que aporta la metodología apropiada para el análisis de problemas en el mundo de la IO.

Gráfico 1
Relación de los cinco elementos de la IO
con el mundo real e ideal
Fuente: [21]





Gracias al análisis de estos cinco elementos, se puede construir una definición de investigación de operaciones, acorde con la naturaleza y alcance de esta importante herramienta,

*"La IO es la utilización del **método científico** en el análisis y solución de problemas del mundo real (industria, economía, comercio, educación, defensa, etc.) que deben ser concebidos como **sistemas** y entidades complejas que manejan recursos (equipos, útiles, información). Estos sistemas son representados en el mundo ideal por **modelos** matemáticos cuyo análisis y solución busca la **optimización** de resultados que deben ser interpretados y comprometidos para ofrecer asistencia y ayudar a la **toma de decisiones**."* **[21]**

2.2. Noción, concepto y alcance de la teoría de colas

Los atrasos que suceden en las actividades productivas y de gestión pueden resultar sumamente onerosos debido principalmente a la "espera" que se realiza hasta cumplir o realizar la tarea. Estos "atrasos espera" son estudiados por la teoría de colas o fenómenos de espera y dónde el propósito fundamental es plantear una teoría que ayude a minimizarlos o finalmente eliminarlos.

La teoría de colas fue investigada y estudiada por Erlang en el año de 1909. Este matemático se preocupó de los problemas de congestión en el tráfico de comunicación telefónica; a él le intereso todo el análisis probabilístico que se presentaba en este problema por eso escribió el libro "Solutions of some problems in the theory of probabilities". Más tarde, Molina (1927) y Thornton (1928) enriquecieron este trabajo.

Se dice que la teoría de colas trata de desarrollar un modelo simbólico del sistema físico para simplificar la solución del problema y que "la teoría de colas no es una técnica de optimización directa, pero si una herramienta analítica que permite explorar y conocer el comportamiento de un sistema de servicio, logrando de esta manera indirecta una optimización aproximada". **[22]**

Diremos que la teoría de colas (TC) analiza problemas de los sistemas de servicio y atención al cliente con el objetivo de buscar un equilibrio entre el EXCESO y la INSUFICIENCIA de servicio; es decir en términos económicos, lograr un balance entre el COSTO DE SERVICIO y el COSTO Asociado a la ESPERA. Entonces se podrá definir a la TC cómo :

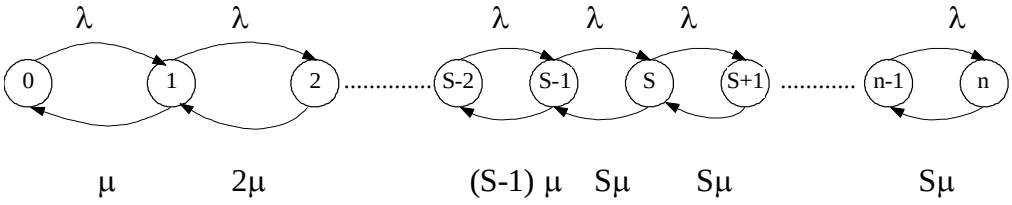
"La TC es una técnica matemática, probabilistica que se ocupa del análisis de problemas caracterizados por un flujo de "CLIENTES" (personas, maquinas, automóviles, etc.), hacia una o más "ESTACIONES DE SERVICIO" (Bancos, mecánicos, estaciones de gasolina, etc.) con el propósito de estudiar este tipo de comportamiento, obteniendo información relevante tal como: el tiempo medio de espera de un cliente, el tiempo medio de ocio, la longitud promedio de clientes en la cola, la probabilidad de que haya n clientes en el sistema de colas, etc. Esta información permitirá la toma de decisiones y el cálculo de costos pertinentes para tomar las acciones necesarias en procura de lograr la mayor eficiencia del sistema". ***[22]***

Podemos citar varias situaciones que caracterizan a los sistemas de colas:

- Arribo de clientes a los cajeros de un banco.
- Arribo de automóviles a las estaciones de gasolina.
- Funcionamiento y congestión de las centrales telefónicas.
- Venta de entradas en las ventanillas.
- Reparación de máquinas por los mecánicos.
- Aterrizaje de aviones en un aeropuerto.
- Ejecución de tareas en los centros de cómputo.
- etc.

La solución analítica más común de estos modelos propone que tanto las distribuciones de tiempos de llegada y de tiempos de servicio siguen la distribución probabilística continua exponencial; esto quiere decir, por teorema, que los eventos de llegada y de servicio siguen la distribución discreta de Poisson. Para un modelo analítico característico con este comportamiento y naturaleza se tiene:

- El diagrama de tasas:



Donde:

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\,\mu \text{ para } n = 1,2,.....S \\ S\,\mu \text{ para } n \geq S \end{cases}$$

Para tipificar estos modelos básicos, se usa la notación de Kendall-Lee-Taha que plantea la forma: [**A/B/C**] **:** [**D/E/F**], donde:

A, representa la distribución probabilística referida al tiempo entre llegadas (M para exponencial, G para general, D para fija, etc.).

B, representa la distribución probabilística del tiempo de servicios.

C, representa el número de canales de servicio.

D, representa la disciplina de atención (Puede ser FIFO, LIFO, con prioridad, random service).

E, representa la longitud máxima de la cola.

F, representa la población o fuente potencial de clientes.

En este sentido un sistema: **[M/M/1] : [FIFO/∞/∞]**, representa un modelo básico con tiempos de llegada exponenciales, tiempos de servicio exponenciales, un solo servidor o canal simple, primero en entrar y primero en ser atendido (First Input, First Output), con una cola infinita y con una población potencial de clientes infinita.

Para estos sistemas básicos de cola infinita, se plantean las fórmulas más importantes que permiten calcular los parámetros más relevantes con cuyos resultados se apoyará la toma de decisiones en esta temática. Estas fórmulas para un solo canal y varios canales, se muestran en el cuadro 1.

Cuadro 1
Fórmulas básicas de la teoría de colas para distribuciones exponenciales y de Poisson

	[M/M/1]:[FIFO/∞/∞]	[M/M/S]:[FIFO/∞/∞]
Porcentaje de ocupación del sistema	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$
Probabilidad de que el sistema esté vacío	$P_0 = 1-\rho$	$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!(1-\lambda/S\mu)}\right]^{-1}$
Probabilidad de que haya n clientes en el sistema	$P_n = \rho^n(1-\rho)$	$P_n = \left\{\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0\right\}$ *Para* $n \le S$ $P_n = \left\{\frac{(\lambda/\mu)^n}{S!S^{n-S}}P_0\right\}$ *Para* $n > S$
Probabilidad de que el sistema se esté llenando	$P\{n<1\} = P_0 = 1-\rho$	$P\{n<S\} = P_0 + P_1 + ... + P_{S-1}$
Probabilidad de que el sistema esté lleno	$P\{n \ge 1\} = 1 - P_0$	$P\{n \ge S\} = \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!(1-\lambda/S\mu)}P_0$
Longitud esperada de clientes en el sistema	$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$	$L = Lq + \psi = Lq + \lambda/\mu$
Longitud esperada de clientes en la cola	$Lq = L - (1-P_0) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$	$Lq = \frac{(\lambda/\mu)^S P_0 \rho}{S!(1-\rho)^2}$
Tiempo esperado de espera en el sistema	$\omega = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$	$\omega = \frac{L}{\lambda}$
Tiempo esperado de espera en la cola	$\omega_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$	$\omega_q = \frac{L_q}{\lambda}$

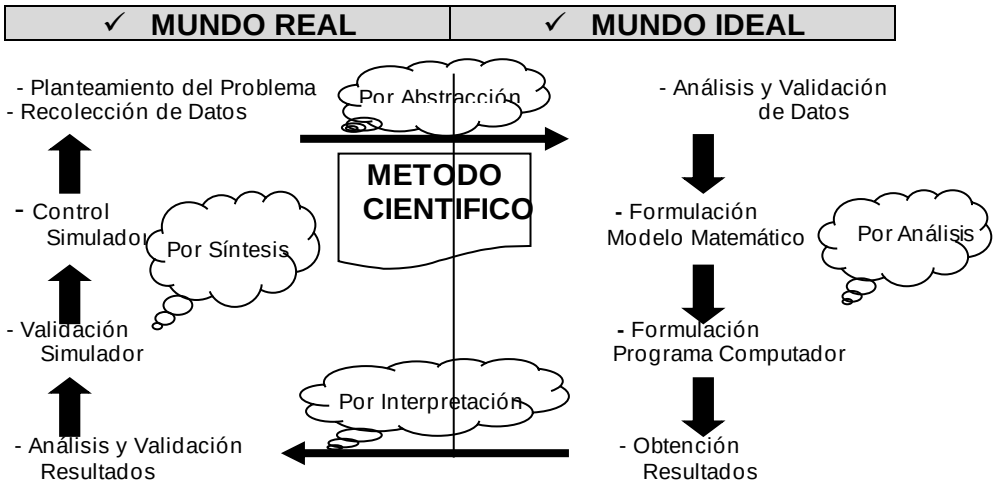
2.3. Noción, Concepto y Alcance de la Simulación

2.3.1. Generalidades

La IO trabaja con modelos matemáticos que desde el punto de vista de su forma de solución se clasifican en ANALÍTICOS y EXPERIMENTALES. Los modelos analíticos encuentran solución a través de la utilización de algoritmos y fórmulas definidas cuyos pasos y procedimiento de cálculo quedan claramente establecidos. Los modelos experimentales sin embargo, trabajan con la teoría de ensayo y error, es decir tratan de generar respuestas referentes a través de la experimentación y por aproximaciones sucesivas; este procedimiento repetitivo de tanteo se hace generalmente con la ayuda de un computador digital generando respuestas aproximadas y no exactas. Este es el mundo de la simulación.

La simulación debe aplicarse a problemas cuya solución analítica es sumamente difícil por no decir imposible. La simulación permite la emulación de cualquier proceso cuya marcha o desarrollo depende de factores aleatorios constituyéndose en un método universal que se aplica a la solución de problemas modelados matemáticamente. En este sentido la simulación aplica la siguiente metodología dentro de un esquema mundo real-ideal (ver gráfico 2)

Gráfico 2
Metodología de la simulación
pasos en el mundo real e ideal
Fuente: Elaboración propia en base a [22]



En este sentido se puede intentar dar una definición de simulación acorde con estos propósitos:

"La Simulación es una técnica numérica y experimental que trabaja en base a la teoría de ensayo y error. La simulación analiza problemas complejos a través de la formulación de modelos matemáticos implementados en computadora; estos modelos son generalmente de naturaleza estocástica y su objetivo es dar respuesta aproximada a los problemas reales en períodos extensos de tiempo" **[22]**

2.3.2. Generación de procesos aleatorios para simulación

Hasta ahora hemos hablado de la simulación en una perspectiva de alcance general; sin embargo cuando se presenta algún problema de simulación, las variables que intervienen pueden ajustarse a seguir cualquier tipo de distribución de probabilidad conocida o no conocida. En este marco es necesario desarrollar un método que permita la generación de variables aleatorias que sigan cualquier distribución y que se lleguen a formular ecuaciones directas para su utilización en problemas de simulación; en este caso estamos hablando de la simulación Montecarlo, a través del método de la transformada inversa.

- **Método de la transformada inversa**

Cualquier generador que se desarrolle siempre está en función de números aleatorios distribuidos uniformemente entre [0,1]; por tanto este método aprovecha este concepto y trabaja con la identidad:

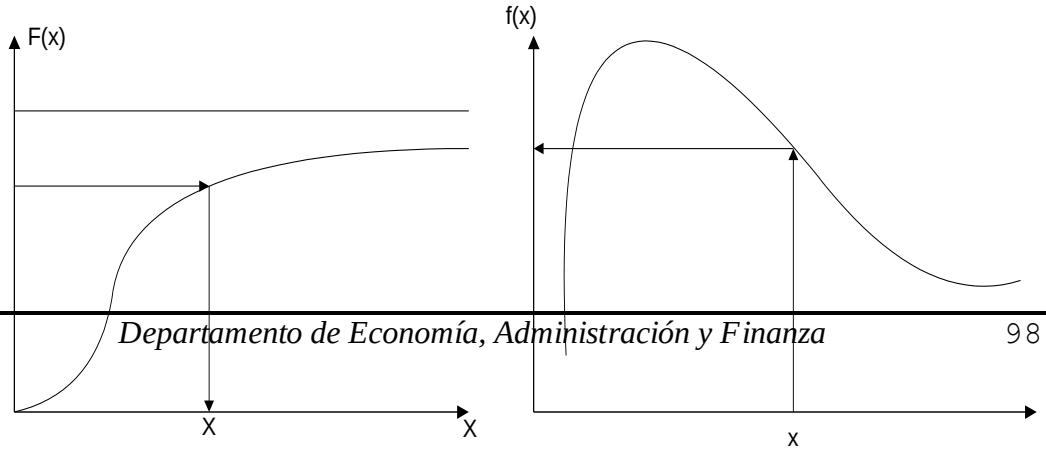
$$P\{X \leq x\} = F(x) = r$$

Donde:

F(x) es la función acumulada de la distribución en estudio.
r, es un número aleatorio o random generado entre [0,1] y que sigue la distribución uniforme.

Es decir que según este método, la función acumulada se iguala al número aleatorio; esto bajo la condición de que ambos tienen su gama de variación entre 0 y 1. El método de la transformada inversa propone que se genere un número aleatorio o random y se lo proyecte sobre la curva acumulada F(x), leyendo para ese punto la abcisa correspondiente que será el valor de variable aleatoria que sigue la distribución de densidad f(x) propuesta. El gráfico 3 muestra el procedimiento considerando las funciones referidas.

Gráfico 3
Método de la transformada inversa
Fuente: [22]



Luego si:

$$F(X) = r$$

$$\boldsymbol{X = F^{-1}(r)}$$

Entonces:

$$r = F(X) = \int_0^x f(t)\,dt$$

O sea que:

$$P\{X \le x\} = F(x) = P\{r \le F(x)\} = P\{F^{-1}(r) \le x\}$$

Esta técnica es una de las más comunes y utilizadas, pero tiene la dificultad de que muchas veces hallar la función acumulada F(x) se torna difícil y causa dificultades para su integración; en estos casos hay que acudir a otros conceptos auxiliares y otros métodos generalmente de tipo numérico y aproximado.

- **Generador Empírico**

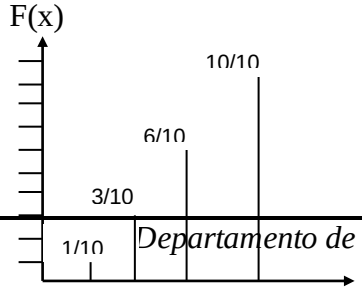
Si tomamos la siguiente distribución másica que no sigue las diferentes distribuciones conocidas:

$$p(x) = \frac{x}{10};\ x = 1,2,3,4$$

El Generador será:

$$F(x) = \sum_{t=1}^{x} \frac{t}{10} = \frac{1}{10}\,\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{20}$$

Gráficamente la función acumulada es:



0 1 2 3 4

Por el principio de la transformada inversa se tiene el generador:

$$\begin{cases} \text{Si} \quad 0 \le r \le 1/10 & \Rightarrow x = 1 \\ \text{Si} \quad 1/10 < r \le 3/10 & \Rightarrow x = 2 \\ \text{Si} \quad 3/10 < r \le 6/10 & \Rightarrow x = 3 \\ \text{Si} \quad 6/10 < r \le 1 & \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

2.3.3. Elementos de un modelo de simulación

Variables

Las variables son los elementos que se utilizan para relacionar los componentes de un problema de simulación. Las variables pueden ser:

- ***EXÓGENAS***

Son las llamadas variables independientes o de entrada al modelo. Pueden ser controlables y no controlables siempre y cuando puedan ser predecibles por los decisores. Por ejemplo los tiempos de arribo y servicio para un sistema de colas son variables exógenas.

- ***DE ESTADO***

Son llamadas variables intermedias e identifican el estado del sistema en determinados instantes del tiempo. Están relacionadas con los otros tipos de variables gracias a las ecuaciones y/o relaciones matemáticas definidas. Por ejemplo es variable de estado, el tiempo de ocio que un servidor tiene cuando espera el arribo de un cliente a un sistema de colas.

- ***ENDÓGENAS***

Son las variables dependientes o de salida del sistema. La interacción de las variables exógenas con las de estado, generan las variables endógenas. Son ejemplos de variables endógenas: El valor esperado del punto de pedido para un sistema de inventarios, la utilidad neta esperada de una empresa, el número óptimo de unidades a procesar para minimizar los costos en un sistema de producción, etc.

Parámetros

Los parámetros son estimados estadísticamente gracias al procesamiento de la información de entrada; de esta manera se constituyen en una suerte de variables exógenas muy valiosas. En este contexto la estimación de medias, varianzas y momentos es muy útil para alimentar al desarrollo del modelo.

Relaciones Funcionales

Estas no son nada más que ecuaciones o funciones que relacionan y ligan a las variables y parámetros del modelo. Pueden ser de dos tipos:

- ***CARACTERÍSTICAS DE OPERACIÓN***

Que son hipótesis definidas para la construcción del modelo. En el caso de modelos estocásticos son características de operación, las funciones de masa o densidad que pueden ser asociadas a las diferentes variables exógenas del sistema.

- ***IDENTIDADES***

Son ecuaciones admitidas sin discusión como verdades absolutas para el modelo. Por ejemplo la utilidad es igual al ingreso menos el costo; el tiempo total en un sistema de colas es el tiempo en la cola mas el tiempo de servicio, etc.

3. PROBLEMÁTICA

Para obtener soluciones analíticas en torno a un modelo de esta naturaleza; la teoría probabilística de colas, provee de conceptos y expresiones matemáticas que han sido deducidas y permiten calcular los parámetros relevantes y característicos del sistema, tales como: la longitud promedio de clientes en el sistema y en la cola, el tiempo esperado que pasa un cliente en la cola y en el sistema, las probabilidades de estado estable, los porcentajes de ocupación y de ocio, etc.

Sin embargo, estas expresiones conocidas y deducidas en base a la propiedad markoviana y al proceso de nacimientos y muertes; consideran que las distribuciones de los tiempos de llegadas y de servicios siguen la distribución exponencial; en otras palabras, se dice que el número de llegadas y de servicios sigue la distribución de Poisson; originando de esta manera los procesos llamados Poissonianos.

Cuando las distribuciones de probabilidad de los tiempos de arribo o de servicio son diferentes (Normal, Gamma, Beta Chi-cuadrado, T de Student, etc.), las fórmulas analíticas deducidas no funcionan. Sin embargo, existen intentos muy interesantes para los siguientes casos: tiempo de arribo exponencial, servicio cualquiera y un servidor con la fórmula de Pollatzeck-Kintchine; tiempo de arribo cualquiera, servicio exponencial y un servidor con el análisis de las Cadenas de Markov Inducidas.

Planteada esta problemática, se puede acudir a la utilización de un procedimiento numérico y experimental, tal como la simulación Montecarlo. Esta técnica tiene la virtud de poder establecer generadores de procesos que siguen cualquier distribución de probabilidad conocida, e inclusive empírica. Aún más, el procedimiento establecido, se traduce en un modelo matemático que puede ser bien implementado en un programa de computadora, llegando a obtener resultados mediante la emulación del proceso en períodos extensos de tiempo real.

4. SIMULACION DE UN SISTEMA DE COLAS DE UN SOLO CANAL

4.1. Planteamiento del problema

Una cadena de supermercados es abastecida por un almacén central donde la mercadería llega a este almacén durante la semana en un día particular a partir de las 11:00 de la mañana. Esto quiere decir que la mercadería que se provee puede ser descargada a partir de este horario. Un equipo de tres personas se ocupa de descargar esta mercadería tomando en cuenta que aproximadamente a las 15:00 tendrán un tiempo de media hora para tomar su almuerzo. El salario por hora que reciben este personal es de 25 $. El almacén debe procesar alrededor de unas quince descargas diarias, entendiendo que los camiones disponibles cuando terminen de descargar, irán a traer otra carga. La descarga debe terminar en teoría a las 20:00, debiéndose pagar horas extra si se pasa de este horario; el salario extra del personal sube a 30 $ por hora. El costo de espera del camión es de 100 $ por hora. Los tiempos y probabilidades de llegada y de servicio, se muestran en los cuadros siguientes. Mediante una simulación de las 15 descargas, estimar los parámetros relevantes para ver el comportamiento semanal de las descargas.

TIEMPO ENTRE LLEGADA (MIN)	PROB.	PROB. ACUM.
20	0,02	0,02
25	0,08	0,1
30	0,12	0,22
35	0,25	0,47
40	0,2	0,67
45	0,15	0,82
50	0,1	0,92
55	0,05	0,97
60	0,03	1

TIEMPO DE SERVICIO (MIN)	PROB.	PROB. ACUM.
20	0,05	0,05
25	0,1	0,15
30	0,2	0,35
35	0,25	0,6
40	0,12	0,72
45	0,1	0,82
50	0,08	0,9
55	0,06	0,96
60	0,04	1

4.2. Formulación del Modelo Matemático

- VARIABLES EXÓGENAS

N = El número de clientes a simular, en este caso 15
S = El número de estaciones en paralelo, en este caso uno
TA_i = Tiempo de arribo del i-ésimo cliente
TS_i = Tiempo de servicio para el iésimo cliente
CE = Costo horario de espera de un cliente
CS = Costo salarial horario
CX = Costo de Horas extra sobre las 20:00

- VARIABLES DE ESTADO

TEC_i = Tiempo de Espera del i-ésimo cliente
TES_i = Tiempo de Espera del i-ésimo servidor
TTEC = Tiempo Total de Espera para el cliente en la cola
TTES = Tiempo total de espera para el servidor o canal
TTA = Tiempo Total de Arribo o llegadas
TTS = Tiempo Total de Servicio
NC_i = Longitud de cola en el i-ésimo cliente (Longitud de la línea)
TX = Tiempo extra excedido sobre las 20:00

- PARÁMETROS

λ = Tasa media de arribos o llegadas
μ = Tasa media de servicios
$1/\lambda$ = La media del tiempo entre arribos
$1/\mu$ = La media del tiempo de Servicio

- VARIABLES ENDÓGENAS

ω_q = El Tiempo Esperado de Espera en la Cola
ω = El Tiempo Esperado de Espera en el Sistema (cola + servicio)
L_q = El número esperado de clientes en la cola
L = El número esperado de clientes en el sistema (cola + servicio)
ρ = Tasa de ocupación del sistema de colas

- IDENTIDADES

$$TTA = \sum_{i=1}^{N-1} TA_i$$

$$TTS = \sum_{i=1}^{N} TS_i$$

$$\lambda = \frac{1}{TTA/(N-1)}$$

$$\mu = \frac{1}{TTS / N}$$

$$Lq = \frac{\sum NC_i}{N}$$

$$TTEC = \sum TEC_i$$

$$\omega_q = \frac{TTEC}{N}$$

$$TTES = \sum TES_i$$

$$\omega = \omega_q + \frac{1}{\mu}$$

$$TX = TT - 20:00$$

$$E(CE) = \frac{\omega * CE * N}{60}$$

$$E(CS) = CS * TT * S$$

$$E(CX) = TX * CX$$

$$E(CT) = E(CE) + E(CS) + E(CX)$$

- CARACTERISTICAS DE OPERACIÓN

En este caso se consideran sólo distribuciones de probabilidad empíricas, tanto para las llegadas como para los arribos o llegadas. Los histogramas acumulados de frecuencia se ilustran en los gráficos 4 y 5.

Gráfico 4

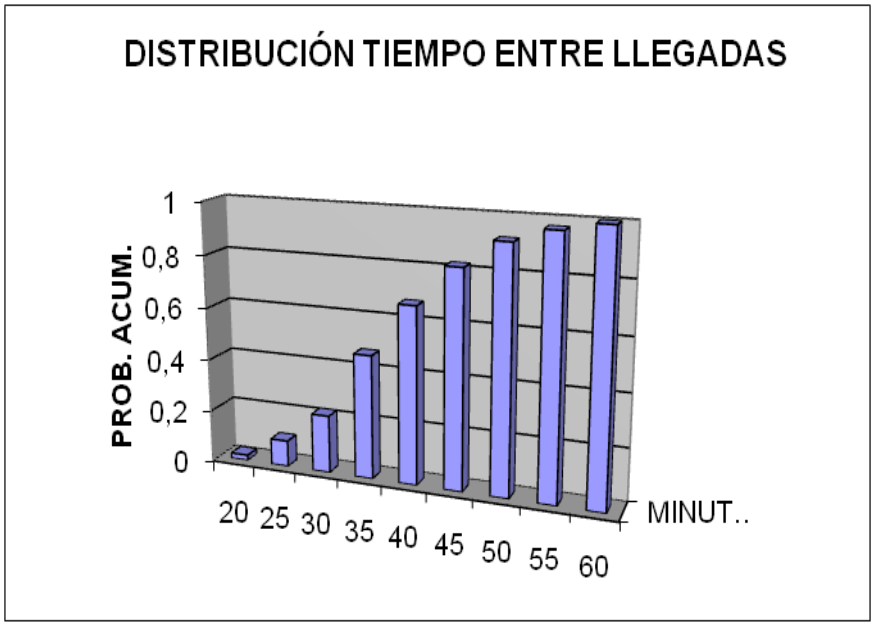
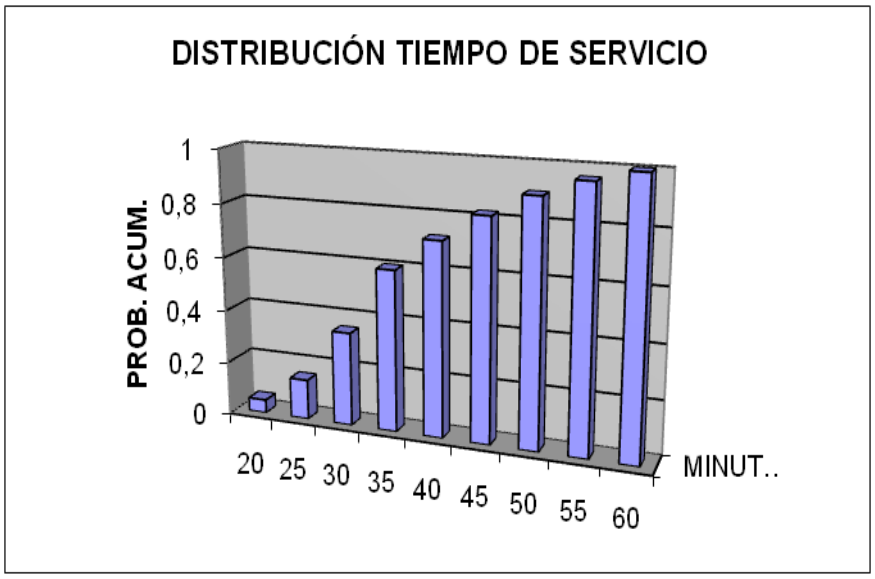


Gráfico 5



4.3. Procedimiento de simulación

Una vez establecido los elementos del modelo matemático, se debe desarrollar un procedimiento de simulación que puede ser aplicado después en un programa de computador, sea en un lenguaje de propósitos especiales o en un lenguaje de alto nivel.

El procedimiento sigue los siguientes pasos:

1. Generar un número random para simular el tiempo de servicio del primer cliente que empieza a ser atendido a las 11:00. Con ese número aleatorio distribuido entre 0 y 1 encontrar en la tabla de distribución acumulada el tiempo de servicio.

2. Con el tiempo de servicio simulado determinar el tiempo de terminación del servicio (11:50).

3. Acumular la longitud de la línea de espera.

4. Generar un número random y simular el tiempo entre llegadas, para el segundo cliente, en la distribución acumulada del tiempo entre llegadas.

5. Calcular la nueva hora de llegada.

6. Poner el reloj de inicio del servicio de acuerdo al horario de terminación del servicio anterior.

7. Generar un random y simular otro tiempo de servicio en la distribución acumulada.

8. Determinar el tiempo de finalización del servicio.

9. Calcular y determinar el tiempo de espera sea para los encargados o para el cliente simulado.

10. Acumular la línea si corresponde.

11. Repetir desde el paso 4.

Este proceso lo repetimos 15 veces o descargas y veremos que llega a finalizar a las 21:20; esto quiere decir que si normalmente se trabaja hasta las 20:00, existe un período extra de 01:20.

Después de culminar este proceso repetitivo, se puede totalizar las columnas que corresponden para que con estos resultados se puedan obtener los resultados promedio y relevantes para tomar una decisión apropiada y que permita lograr optimizar el sistema. Este proceso se muestra en el cuadro 2.

Cuadro 2.
Procedimiento de Simulación

No	No RANDOM	TIEMPO ENTRE LLEGADAS (MIN)	HORA LLEGADA	INICIO SERVICIO	No RANDOM	TIEMPO SERVICIO (MIN)	TERMINA SERVICIO	TIEMPO ESPERA SERVIDOR (MIN)	TIEMPO ESPERA CLIENTE (MIN)	LONGITUD LÍNEA
1	-	-	11:00	11:00	0,83	50	11:50	-	-	1
2	0,48	40	11:40	11:50	0,14	25	12:15	-	10	-
3	0,98	60	12:40	12:40	0,51	35	13:15	25	-	1
4	0,06	25	13:05	13:15	0,72	45	14:00	-	10	1
5	0,45	35	13:40	14:00	0,05	25	14:25	-	20	1
6	0,15	30	14:10	14:25	0,84	50	15:15	-	15	1
7	0,19	30	14:40	15:45	0,29	30	16:15	-	65	1
8	0,15	30	15:10	16:15	0,59	35	16:50	-	65	1
9	0,67	45	15:55	16:50	0,76	45	17:35	-	55	1
10	0,9	50	16:45	17:35	0,29	30	18:05	-	50	1
11	0,58	40	17:25	18:05	0,61	40	18:45	-	40	1
12	0,68	45	18:10	18:45	0,17	30	19:15	-	35	1
13	0,73	45	18:55	19:15	0,1	25	19:40	-	20	1
14	0,98	60	19:55	19:55	0,87	50	20:45	15	-	-
15	0,57	40	20:35	20:45	0,46	35	21:20	-	10	1
		575				**550**		**40**	**395**	**13**

4.4. Resultados esperados

Los parámetros y resultados que se pueden obtener de acuerdo a las identidades definidas en la formulación del modelo, son:

El tiempo promedio de arribo al sistema y la tasa media de arribo:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{575}{14} = 41.07 \frac{\text{Min}}{\text{Cl}}$$

$$\lambda = \frac{14}{575} = 0.02434 \frac{\text{Cl}}{\text{Min}}$$

El tiempo promedio de servicio y la tasa media de servicio para el sistema:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{550}{15} = 36.67 \frac{\text{Min}}{\text{Cl}}$$

$$\mu = \frac{15}{550} = 0.02727 \ \frac{Cl}{Min}$$

La tasa de ocupación del sistema:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.02434}{0.02727} = 0.8925$$

La longitud promedio en la cola:

$$L_q = \frac{13}{15} = 0.867 \ \frac{Cl}{Min}$$

El tiempo esperado de espera en la cola:

$$\omega_q = \frac{395}{15} = 26.33 \ \frac{Min}{Cl}$$

El tiempo esperado de espera en el sistema:

$$\omega = 26.33 + 36.67 = 63 \ \frac{Min}{Cl}$$

El tiempo extra:

$$TX = 21:20 - 20:00 = 01:20 = 80 min$$

El costo esperado de espera:

$$E(CE) = 26.33 \frac{min}{cl} * 100 \frac{\$}{Hr} * \frac{1Hr}{60min} * 15cl = 658.25\$$$

El costo esperado de servicio:

$$E(CS) = 25 \frac{\$}{Hr - per} * 9Hr * 3per = 675\$$$

El costo esperado extra:

$$E(CX) = 30 \frac{\$}{Hr - per} * 80min * \frac{1Hr}{60min} * 3per = 120\$$$

El costo esperado total:

$$E(CT) = 658.25\$ + 675\$ + 120\$ = 1453.25\$$$

5. CONCLUSIONES

- Se realizó una simulación manual para un día de trabajo de descarga con un equipo de tres personas desde las 11:00 a 21:20, simulando un total de 15 descargas.

- Los resultados obtenidos reflejan una tasa de ocupación del sistema del 89.25%. El tiempo promedio de espera es de 26.33 minutos; el tiempo de espera en el sistema es de 63 minutos. Se tiene un tiempo extra de descarga de 80 minutos.

- El costo esperado del cliente es de 658.25 $ por jornada de trabajo; el costo esperado de servicio es de 675 $; existe un costo extra de 120 $; generando un costo esperado total de 1453.25 $ para una jornada.

- La simulación provee los parámetros principales que permitan tomar una decisión: aumentar o disminuir el equipo de trabajo, regular la ocupación del sistema, optimizar algunos costos. Estos parámetros son una importante herramienta de ayuda a la toma estratégica de decisiones.

- El procedimiento puede ser implementado en un programa de computadora digital y de esa forma mejorar los cambios y la sensibilidad del modelo y de esa forma ver escenarios distintos que apoyen de mejor manera a la toma de decisión.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ANDERSON, SWEENEY, WILLIAMS (2000). "Quantitative Methods For Business". Ed. Thomson, 7a Ed. USA.
2. AZARANG, Mohammad R.; GARCIA DUNNA, Eduardo (2000). "Simulación y análisis de modelos estocásticos". Ed. McGraw Hill. México
3. EPPEN, G.D.; GOULD, F.J. (2000). "Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa". Ed. Pearson. México.
4. G. de GHELLINCK (1993). "Modelisation Stochastique". Notes de Cours. Louvain la Neuve-Belgique.
5. HILLIER; LIEBERMAN (2002). "Investigación de Operaciones". Ed. McGraw Hill; 7ª Ed. EEUU.
6. LACHTERMACHER, Gerson (2007). "Pesquisa Operacional". Ed. Campus. Brasil.
7. MIRSHAWKA, Víctor (1990). "Aplicacoes de Pesquisa Operacional". Ed. Livraria Nobel S.A. Sao Paulo-Brasil.

8. MITAL, K. V. (1984). "Métodos de Optimización en Investigación de Operaciones y Análisis de Sistemas". Ed. Limusa. México.
9. NAYLOR, BALINTFY, BURDICK, KONG CHU (1977). "Técnicas de Simulación en Computadoras". Ed. Limusa.
10. PRAWDA, Juan (1981). "Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones". Ed. Limusa. México.
11. RIOS INSUA, David; RIOS INSUA, Sixto (2000). "Simulación, métodos y aplicaciones". Ed. Alfa Omega. Colombia.
12. RUEGG (1989). "Processus Stochastiques". Francia.
13. SASIENI, Maurice; YASPAN, Arthur; FRIEDMAN, Lawrence (1982). "Investigación de Operaciones, Métodos y Problemas". Ed. Limusa. México.
14. SHELDON, M. Ross (2000). "Simulación". Ed. Prentice Hall; 2ª Ed. México.
15. TAHA, Hamdy A. (2004). "Investigación de Operaciones"; Ed. Pearson; 7ª Ed. México.
16. TAYLOR, SCHMIDT (1985). "Simulación de Sistemas Industriales"; Ed. Trillas. México.
17. TERRAZAS, Rafael (1995). "Investigación de Operaciones, un Enfoque Didáctico". Ed. Serrano. Cochabamba-Bolivia.
18. TERRAZAS, Rafael (1988). "Simulación de Sistemas"; Publicaciones de la Facultad de Ciencias y Tecnología, serie técnica; UMSS. Cochabamba-Bolivia.
19. TERRAZAS Rafael (2005). "Modelos Lineales de Optimización", Ed. Etreus, 3ª Ed. Cochabamba-Bolivia.
20. TERRAZAS Rafael (2005). "Programación Dinámica y Modelos Estocásticos". Ed. Etreus. Cochabamba-Bolivia.
21. WINSTON, Wayne L. (2004). "Investigación de Operaciones, Aplicaciones y Algoritmos". Ed. Thomson; 4ª Ed. México.